OliMaTO 5

Simulazione Gara Nazionale 2017

20 Aprile 2017

Benvenuti alla quinta edizione della simulazione della gara nazionale delle Olimpiadi della Matematica sotto l'egida di OliMaTo, la nona complessiva ospitata dalla S.I.E.S Spinelli. Compilare la prima parte di questo modulo prima della gara e la seconda parte prima di consegnare.

NOME:

COGNOME:

Anno di corso:

Istituto frequentato:

Provincia di appartenenza:

Indirizzo e-mail:

Punteggio alle provinciali (indicare se si parteciperà alla gara nazionale individuale):

Indica qui di seguito i punteggi che PENSI di aver ottenuto nei seguenti esercizi:

Esercizio 1:

Esercizio 2:

Esercizio 3:

Esercizio 4:

Esercizio 5:

Esercizio 6:

Punteggi ottenuti (spazi riservati ai correttori):

1. 2. 3. 4. 5. 6. TOT.

REGOLAMENTO

- Si raccomanda di scrivere le soluzioni esclusivamente nel fascicoletto che avete ricevuto, rispettando gli spazi relativi ai singoli esercizi. Per poter partecipare alla gara è necessario essere muniti di un documento d'identità. Lasciatelo in evidenza sul vostro banco.

- Gli unici strumenti consentiti sono quelli per scrivere e per disegnare. In particolare, E' VIETATO INTRODURRE NELL'AULA appunti, tavole, macchine calcolatrici, strumenti elettronici di qualsiasi genere e telefoni cellulari o qualsivoglia mezzo di comunicazione con l'esterno.

- Per ragioni organizzative non è consentito lasciare il proprio posto senza l'autorizzazione del personale di sorveglianza. Per qualsiasi necessità dovete alzare la mano e attendere. In particolare, questa procedura deve essere seguita per:

  - porre dei quesiti relativi al testo della prova;
  - chiedere di andare in bagno (prima di recarvi in bagno raccogliete tutto ciò che avete scritto e consegnatelo al sorvegliante. Non è consentito andare in bagno durante i primi 30 minuti e durante gli ultimi 45 minuti di gara);
  - consegnare il compito.

- La durata della prova è di 4 ore e 30 minuti. Ogni esercizio vale 7 punti.

- Solo durante i primi 30 minuti di gara è consentito porre delle domande per chiarimenti sul testo.

- Negli ultimi 10 minuti di gara non è consentito consegnare il compito. Tutti quelli che saranno rimasti in aula fino a quel momento dovranno lasciare il fascicoletto chiuso sul proprio tavolo, senza altri fogli o brutte copie, ed attendere il termine ufficiale della gara. Al termine esatto i sorveglianti provvederanno a raccogliere tutti i fascicoletti e solo alla fine sarete autorizzati a lasciare l'aula.

Buon lavoro!!!

Esercizio 1

Dimostrare che preso un qualsiasi numero di 2017 cifre tutte uguali a 8 o 5 è sempre possibile eliminare una cifra in modo tale che il numero (di 2016 cifre) rimanente sia divisibile per 11.

Soluzione proposta

Dimostriamo che l'enunciato è vero non solo per 2017 cifre, ma per un numero qualsiasi *dispari* di cifre. Procediamo per induzione sul numero di cifre. Se $n = 3$ i possibili numeri sono $555, 558, 585, 588, 855, 858, 888, 885$. Notiamo che ognuno di essi può essere riportato a 55 o 88, entrambi divisibili per 11, eliminando una cifra.
Procediamo quindi con il passo induttivo, supponiamo che sia vera per $n = 2k - 1$ e dimostriamo che lo è per $2k + 1$. Distinguiamo due casi:

- Se il nostro numero contiene due 8 o due 5 consecutivi li eliminiamo, notando che nel criterio di divisibilità per 11 questo non cambia nulla. Una volta eliminati otteniamo un numero di $2k - 1$ cifre dal quale, per ipotesi induttiva, possiamo togliere una cifra per renderlo divisibile per 11. Una volta fatto aggiungiamo le due cifre uguali tolte inizialmente per trovare un numero di $2k$ cifre divisibile per 11

- Se non ci sono due 8 o 5 vicini, allora il numero è del tipo 8585...58 o del tipo 5858...85. Notiamo che entrambi hanno una cifra centrale, essendo dispari il numero di cifre, e che, rimuovendo quella, otteniamo un numero divisibile per 11.

Esercizio 2

Trovare tutti gli interi positivi n tali che esistano $p_1, ..., p_n$ numeri primi non necessariamente distinti tali che $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 10 \cdot (p_1 + p_2 + ... + p_n)$

Soluzione proposta

Siccome 10 divide la parte destra dell'uguaglianza deve dividere anche quella a sinistra. Possiamo quindi supporre, senza perdere generalità, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$ e $n \geq 2$. Chiaramente con $n = 2$ non ci sono soluzioni poiché $10 \neq 70$. Dividiamo quindi per 10 entrambi i membri e otteniamo

$$\prod_{i=3}^{n} p_i = 7 + \sum_{i=3}^{n} p_i$$

Se $n = 3$ otteniamo $p_3 = 7 + p_3$ che non ha soluzione. Se $n = 4$ invece otteniamo

$$p_3p_4 = 7 + p_3 + p_4 \Leftrightarrow p_3p_4 - p_3 - p_4 = 7 \Leftrightarrow (p_3 - 1)(p_4 - 1) = 8 = 2^3$$

Da cui $n = 4$ e $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (2, 5, 3, 5)$ (e permutazioni).
Dimostriamo ora che non ci sono soluzioni per $n > 4$: notiamo che vale $\prod_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i$ per ogni sequenza $x_1, ..., x_n$ con $x_i \geq 2$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Questo si dimostra facilmente applicando ripetutamente il seguente ragionamento:

$$x_1x_2 \geq x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1 \geq 0$$

Sia ora senza perdere generalità $p_3 \leq ... \leq p_n$, $P = \prod_{i=3}^{n-1} p_i$ e $S = \sum_{i=3}^{n-1} p_i$, applicando il risultato appena trovato otteniamo

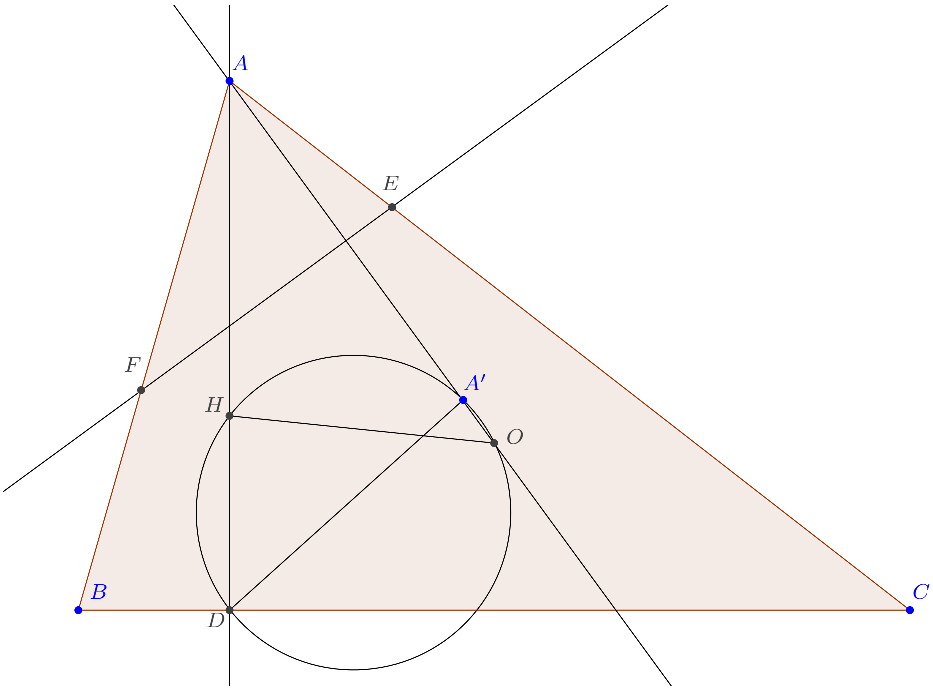
$$7 + S + p_n = Pp_n \geq Sp_n \Leftrightarrow (p_n - 1)(S - 1) \leq 8$$

Analizziamo il caso $n \geq 6 \Leftrightarrow S \geq 2 + ... + 2 \geq 6$ da cui otteniamo $(p_n - 1)(S - 1) \geq 5(p_n - 1)$, quindi $p_n = 2$ da cui $p_3 = ... = p_n = 2$. In questo caso l'equazione iniziale diventa $2^{n-1} \cdot 5 = 10(2(n-1)+5) \Leftrightarrow 2^{n-2} = 2n+3$ e, poiché $n \geq 6$, il membro di sinistra è pari e quello di destra è dispari, assurdo. Rimane il caso $n = 5$. Procedendo come prima otteniamo $3(p_5 - 1) \leq 8$ da cui $p_5 = 2$ o $p_5 = 3$. Rimangono quindi da controllare a mano i casi $(2, 5, 2, 2, 2)$, $(2, 5, 2, 2, 3)$, $(2, 5, 2, 3, 3)$ e $(2, 5, 3, 3, 3)$ che non portano soluzioni.

Esercizio 3

Sia $\triangle ABC$ un triangolo scaleno, siano D, E, F i piedi delle altezze rispettivamente uscenti da A, B, C. Sia A' il simmetrico di A rispetto alla retta EF, H l'ortocentro di $\triangle ABC$ e O il suo circocentro. Dimostrare che il quadrilatero $DA'OH$ è inscrivibile in una circonferenza.

Soluzione proposta



Lemma: I punti A, A' ed O sono allineati.
Dim: Osservo intanto che il quadrilatero $BFEC$ è ciclico in quanto $\angle BFC \cong \angle CEB \cong \frac{\pi}{2}$ per ipotesi, e quindi $\angle BFE$ è supplementare di $\angle ACB$ perché angoli opposti in un quadrilatero ciclico, ma anche $\angle AFE$ è supplementare di $\angle BFE$, quindi $\angle AFE \cong \angle ACB \equiv \gamma$. Ma allora, chiamato $X \equiv AA' \cap EF$ si ha $\angle FAA' \cong \angle FAX \cong \frac{\pi}{2} - \angle AFX \cong \frac{\pi}{2} - \angle AFE \cong \frac{\pi}{2} - \gamma$. Inoltre si ha $\angle BAO \cong \frac{\pi - \angle AOB}{2} \cong \frac{\pi - 2\gamma}{2} \cong \frac{\pi}{2} - \gamma$, quindi $\angle FAA' \cong \angle BAO$, in altre parole A, A' e O sono allineati. $\square$

Dimostriamo ora che i triangoli $\triangle AA'D$ e $\triangle AHO$ sono simili per il secondo criterio, infatti $\angle HAO \equiv \angle DAA'$ è l'angolo in comune (lo è per il lemma). Inoltre $\frac{AH}{AO} = \frac{AF}{\cos(\angle BAH)AO}$ (HF è perpendicolare al lato BC); dato che $\angle BAH \cong \frac{\pi}{2} - \beta$ e perciò $\cos(\angle BAH) = \sin(\beta)$, se moltiplichiamo numeratore e

denominatore per $2\sin(\gamma)$ otteniamo l'uguaglianza $\dfrac{AF}{\cos(\angle BAH)AO} = \dfrac{2AF\sin(\gamma)}{2\sin(\beta)\sin(\gamma)AO}$.
Osserviamo ora che grazie alla ciclicità di $BCEF$ abbiamo $\angle EFC \cong \angle EBC \cong \frac{\pi}{2} - \gamma$, e dunque $\angle AFE \cong \angle AFC - \angle CFE \cong \gamma$; inoltre $AF \cdot \sin(\angle AFE) = \frac{AA'}{2}$ per costruzione di A'. Inoltre $2AO\sin(\gamma) = 2R\sin(\gamma) = AB$. Perciò abbiamo l'uguaglianza $\dfrac{2AF\sin(\gamma)}{2\sin(\beta)\sin(\gamma)AO} = \dfrac{AA'}{\sin(\beta)AB} = \dfrac{AA'}{AD}$, quindi i rapporti fra lati corrispondenti sono uguali e i due triangoli sono simili.
Adesso bisogna dividere in casi a seconda dell'ordine in cui A, A', O sono allineati: se A' sta tra A e O, allora consideriamo gli angoli $\angle HDA'$ e $\angle HOA'$, che sono uguali per quanto appena dimostrato, ed insistono sulla stessa corda HA'. Se O è compreso tra A ed A', allora $\angle OA'D + \angle OHD \cong \angle OA'D + \pi - \angle AHO$, ma per la similitudine vale $\angle OA'D \cong \angle AA'D \cong \angle AHO$.
In entrambi i casi, ci sono le condizioni sufficienti affinché $DA'OH$ sia ciclico.

Esercizio 4

Esiste un insieme infinito $\mathcal{S}$ di interi positivi tale che per ogni n intero positivo e per ogni scelta di $a_1, \dots, a_n$ elementi distinti di $\mathcal{S}$, la somma $a_1 + \dots + a_n$ non sia una potenza perfetta (ovvero un intero della forma a^b con a e b interi e $b \geq 2$)?

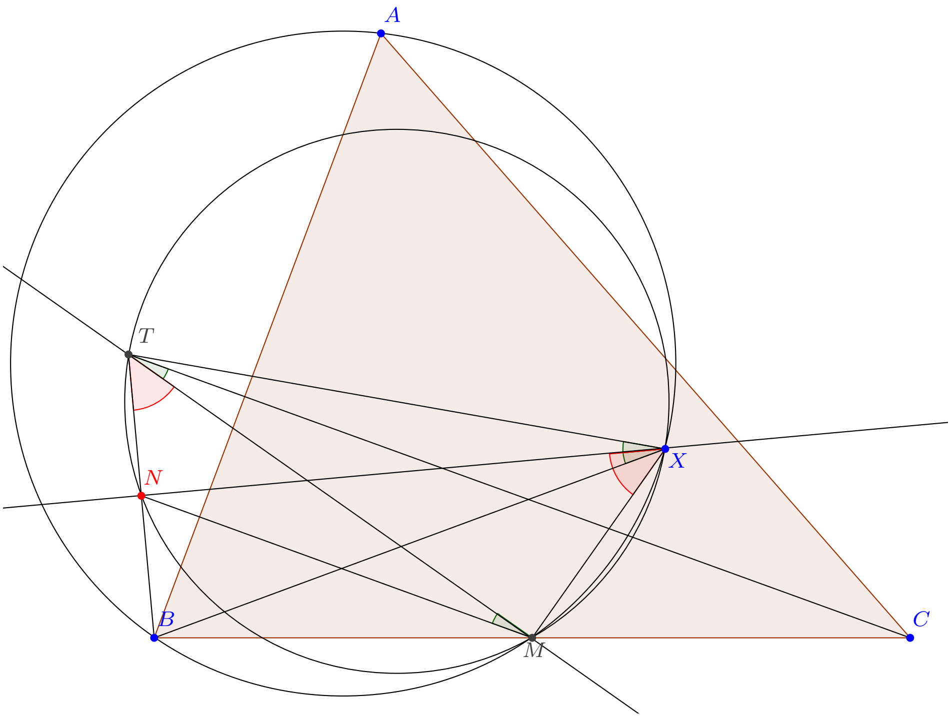
Soluzione proposta

La risposta è affermativa, e in particolare possiamo prendere $\mathcal{S} = \{2^n \cdot 3^{n+1} \mid n \geq 1\}$. Infatti una somma di elementi distinti di $\mathcal{S}$ sarà della forma $2^{x_1} \cdot 3^{x_1+1} + 2^{x_2} \cdot 3^{x_2+1} + ... + 2^{x_n} \cdot 3^{x_n+1}$. Supponendo senza perdere generalità $x_1 < x_2 < ... < x_n$ possiamo raccogliere $2^{x_1} \cdot 3^{x_1+1}$ ottenendo $2^{x_1} \cdot 3^{x_1+1} \cdot (1 + 2^{x_2-x_1} \cdot 3^{x_2-x_1} + ... + 2^{x_n-x_1} \cdot 3^{x_n-x_1})$. Chiamato y il fattore in parentesi notiamo che $y \equiv 1 \pmod 2$ e $y \equiv 1 \pmod 3$, da cui $\mathrm{MCD}(y, 6) = 1$. Se fosse $2^{x_1} \cdot 3^{x_1+1} \cdot y = a^b$, dato che 2 e 3 sono numeri primi, si avrebbe $b \mid x_1$ e $b \mid x_1 + 1$ e in particolare se $b \geq 2$ $\mathrm{MCD}(x_1, x_1 + 1) > 1$ poiché in y non ci sono né fattori 2 né fattori 3, che è impossibile.

Esercizio 5

Sia $\triangle ABC$ un triangolo e M il punto medio di BC. Si prenda un punto X sull'arco minore $\overset{\frown}{MA}$ del circocerchio di $\triangle ABM$. Sia T il punto, interno all'angolo $\widehat{BMA}$, tale che $\angle TMX = 90°$ e $TX = BX$. Dimostrare che il valore di $\angle MTB - \angle CTM$ è indipendente dalla scelta di X.

Soluzione proposta



Consideriamo il punto medio N di BT; dato che $\triangle BTX$ è isoscele, allora $XN \perp BT$. Ma allora $TNMX$ è ciclico, poichè gli angoli $\angle TNX$ e $\angle TMX$ sono entrambi retti ed insistono sulla stessa corda TX; questo implica che $\angle BTM = \angle NTM = \angle NXM$.
Inoltre per il teorema di Talete le rette TC e NM sono parallele, e in particolare $\angle CTM = \angle TMN$, e per la ciclicità di prima abbiamo $\angle TMN = \angle TXN$; infine poiché $\triangle BTX$ è isoscele vale $\angle TXN = \angle NXB$.
In conclusione, $\angle MTB - \angle CTM = \angle NXM - \angle NXB = \angle BXM$, e poiché X sta su $\odot(A, B, M)$ vale $\angle BXM = \angle BAM$.

Esercizio 6

Ci sono $n+1$ caselle allineate, numerate da 0 a n da destra verso sinistra. Un mazzo di $n+1$ carte numerate allo stesso modo viene mescolato e ogni carta viene messa in una casella in modo casuale. Una mossa consiste nel determinare il più piccolo k tale che la posizione numero k sia occupata da una carta $l > k$, rimuovere questa carta e far scorrere tutte le carte dalla posizione $k+1$ alla posizione l di una casella verso destra e mettere la carta l nella casella l. Il gioco termina quando tutte le carte sono al loro posto.

a) Dimostrare che il gioco termina.

b) Determinare tutte le configurazioni per le quali il numero di mosse è massimo.

Soluzione proposta

a) Per $i = 1, ..., n$ sia d_i 0 se la carta i è al posto corretto, 1 altrimenti. Consideriamo la somma $d_1 + 2d_2 + 4d_3 + ... + 2^{n-1}d_n$ che vale al massimo $1 + 2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$ e che vale 0 se e solo se il gioco è terminato. Notiamo che ad ogni mossa la somma decresce, quindi il gioco termina.

b) La somma considerata nel punto precedente ci dice che il gioco può durare al massimo $2^n - 1$ mosse. Notiamo inoltre che se esiste una configurazione tale che il gioco duri esattamente $2^n - 1$ mosse, allora essa è unica; infatti la somma decrescerebbe di esattamente 1 dopo ogni mossa e, giocando al rovescio, ogni mossa è univocamente determinata. Consideriamo ora la configurazione $0, n, n-1, ..., 2, 1$ e dimostriamo per induzione che con questa configurazione iniziale la partita dura esattamente $2^n - 1$ mosse. Il caso $n = 1$ dà la configurazione $0, 1$ che con una mossa (univocamente determinata) porta a $1, 0$ come richiesto. Supponiamo ora che sia vero per $n-1 \geq 1$ e dimostriamolo per n. La carta 0 non si muoverà finché la carta n non arriverà alla posizione 0, ma se ignoriamo la carta 0 e consideriamo come se la carta n fosse la carta 0 l'ipotesi induttiva ci dice che la carta n arriverà al posto 0 solo dopo $2^{n-1} - 1$ mosse. Dopo queste ci ritroviamo alla configurazione $0, n-1, ..., 2, 1, n$. La mossa successiva porta a $n, 0, n-1, ..., 2, 1$, quindi per ipotesi induttiva ci servono altre $2^{n-1} - 1$ mosse, ovvero un totale di $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} + 1) = 2^n - 1$ mosse.