OliMaTO 5

Simulazione Gara a Squadre Nazionale 2017

- Per ogni problema indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- I problemi a nostro giudizio più impegnativi sono contrassegnati da una stellina [$\star$]
- Di seguito sono riportati alcuni valori approssimati utili nello svolgimento dei calcoli:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1,7321 \qquad \sqrt{5} \approx 2,2360 \qquad \sqrt{7} \approx 2,6458 \qquad \pi \approx 3,1415$$

- **10 minuti dall'inizio:** scadenza per la scelta del problema jolly (dopo verrà assegnato il problema 1).
- **30 minuti dall'inizio:** scadenza per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** fine della gara.

Gara scritta da: Eugenio Colla, Matteo Rossi, Michele Trosso, Riccardo Zanotto.
Ambientazione a cura di: Alessandro Perlo.

1. [$\star$] Flashback: Pensa prima di agire

Polo sud. Tre piccoli fratelli pinguini orfani (Skipper, Kowalski e Rico) si allontanano dal loro branco per salvare un uovo che è rotolato giù dalla scogliera. Dall'alto si scorge un iceberg che ha la forma di un poliedro nel quale ogni faccia è un poligono regolare con lato 1, e ogni vertice è incidente a due esagoni regolari e a un quadrato. Kowalski, il più intelligente dei tre, considera un vertice V dell'iceberg e poi considera il volume della parte di iceberg composta da tutti quei punti che sono più vicini a V piuttosto che ad ogni altro vertice (tale volume è detto A_V). Dopo aver calcolato $10000 \cdot A_V$, Kowalski si sente pronto per l'avventura e si lancia giù dalla scogliera. Che numero ha calcolato Kowalski?

Soluzione: La risposta è 4714. Sia P il poliedro in questione. Osserviamo che P è il solido ottenuto togliendo gli angoli da un ottaedro regolare di lato 3, e ha quindi 24 vertici. Per trovare il volume di A_V ci basta quindi trovare il volume di P e dividerlo per 24 per simmetria. Essendo che l'ottaedro è formato da 2 piramidi a base quadrata avrà volume $9\sqrt{2}$, mentre ogni angolo rimosso ha volume $\frac{\sqrt{2}}{6}$, il volume da noi cercato è quindi

$$A_V = \frac{9\sqrt{2} - 6\frac{\sqrt{2}}{6}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.4714$$

2. Flashback: Pensare ti salva la vita

Rotolano, combattono alcune foche leopardo e, grazie all'abilità di Skipper, portano in salvo l'uovo sull'iceberg che avevano visto prima. Kowalski commenta: "La probabilità di salvare l'uovo, in percentuale, è uguale alla somma di $a_1^2 + b_1^2 + ... + a_n^2 + b_n^2$ dove $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ sono le coppie di reali (a, b) che hanno la seguente proprietà: se α è soluzione di $x^2 + ax + b = 0$, allora lo è anche $\alpha^2 - 2$ (se $\alpha = \alpha^2 - 2$, deve essere radice doppia)". Qual è questa percentuale?

Soluzione: La risposta è 0039. Vediamo intanto che $\alpha = \alpha^2 - 2$ ha per soluzioni $\alpha = 2, -1$ perciò abbiamo $x^2 + ax + b = (x-2)^2$ oppure $(x+1)^2$, ovvero ci sono le coppie $(-4, 4)$ e $(2, 1)$.
Chiamiamo $f(x) = x^2 - 2$; se ora $f(\alpha) \neq \alpha$, dobbiamo avere che o $f(f(\alpha)) = \alpha$ oppure $f(f(\alpha)) = f(\alpha)$. La seconda ci dice che $f(\alpha) = 2, -1$, ovvero $\alpha = \pm 1, \pm 2$ da cui due nuove coppie $(0, -4)$ e $(0, -1)$ che però non vanno bene perché rispettivamente 2 e -1 non sono radici doppie.
Infine dobbiamo risolvere $(\alpha^2-2)^2-2 = \alpha$ ovvero $\alpha^4 - 4\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$ che si fattoriza come $(\alpha+1)(\alpha-2)(\alpha^2+\alpha-1) = 0$, ma le nuove coppie arrivano solo da $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ cioè $\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; l'ultima coppia è dunque $(1, -1)$.

3. [$\star$] Flashback: Uovo di Pasqua

"Guarda Skipper che meraviglia!" esclama Kowalski indicando l'uovo. In effetti, sulla sua superficie è raffigurata una tabella $15 \times n$ in cui ogni casella è colorata con un colore, e i colori totali usati sono 7. "Il minimo n", continua Kowalski, "tale che per ogni colorazione si possano sempre scegliere 3 righe e 3 colonne in modo che le 9 intersezioni siano tutte dello stesso colore è ...". Non riesce a finire la frase perché l'uovo si schiude. Emerge il pinguino più carino della storia. Il suo nome è Soldato. Ma quanto vale n?

Soluzione: La risposta è 6371. Per il principio dei cassetti in ogni colonna esiste almeno un colore che si ripete almeno 3 volte, e queste 3 posizioni possono essere scelte in $\binom{15}{3}$ modi. Usando ognuna di queste configurazioni due volte per colore riusciamo ancora a ottenere una tabella che non rispetti le condizioni del testo, quindi $14\binom{15}{3}$ non va bene, ma qualsiasi colonna aggiungiamo troviamo una configurazione che soddisfa, la risposta è quindi $14\binom{15}{3} + 1$.

4. Assalto al formaggio

Presente. I quattro amici tentano un assalto a Fort Knox per mangiare degli snack al formaggio. Con il gas soporifero atterrano le guardie, ma ora devono trovare la password per entrare. Hanno davanti a sé una tastiera con 4 tasti numerati, la password è lunga 7 cifre e Skipper sa, grazie a una soffiata, che ogni tasto deve essere premuto almeno una volta. Quanti tentativi devono fare per essere sicuri di entrare?

Soluzione: La risposta è 8400. Prima fissiamo il numero di volte che ogni tasto viene premuto, abbiamo 12 possibilità del tipo 3,2,1,1, 4 possibilità del tipo 4,1,1,1 e 4 possibilità del tipo 2,2,2,1. Per ognuno contiamo poi i possibili riordinamenti delle cifre, nel primo caso sono $\frac{7!}{3!2!} = 420$, negli altri in modo analogo sono 210 e 630. La risposta è quindi $12 \cdot 420 + 4 \cdot 210 + 4 \cdot 630 = 8400$.

5. Troppa fame

Ormai è fatta! I quattro pinguini arrivano di fronte al tanto desiderato distributore di snack al formaggio... ma improvvisamente vengono risucchiati al suo interno. Una voce mettallica dice: "Non vi rimane più molto tempo per vivere. I minuti a vostra disposizione sono tanti quanto è il resto della divisione per 1000 di a_{2017}, dove a_n è una sequenza di interi non negativi tale che $a_1 = 0$ e $a_{k+1} = \max_{1\leq i\leq k} \{i + a_i + a_{k+1-i}\}$ per ogni $k > 1$. Quindi vi restano ...". Rico ha ingoiato l'altoparlante da cui usciva la voce! Soldato tremante chiede: "Quanti minuti ci restano?"

Soluzione: La risposta è 0136. Dimostriamo per induzione che $a_k = \frac{k(k-1)}{2}$. Per $k = 1$ è ovviamente vero, supponiamo che lo sia per ogni $k \leq n$, per ogni $1 \leq i \leq n$ sia $z_i = i - \frac{n+1}{2}$ da cui $i + a_i + a_{n+1-i} = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + (z_i + \frac{1}{2})^2$, che ha massimo quando $i = n$, da cui $a_{n+1} = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

6. Nero su bianco

Nel covo di Dave c'è una lavagna tutta nera su cui è stata disegnata con un gesso bianco una tabella con 3 righe e 150 colonne. La prima riga è tutta piena di 1, mentre la seconda e la terza hanno un unico 1 iniziale. Soldato la vede e si mette a completare la seconda e la terza riga nel seguente modo: nella seconda e terza colonna come numero inserisce la somma dei due numeri adiacenti (quello a sinistra e quello in alto, come nel triangolo di Tartaglia), nella colonna successiva riscrive il numero adiacente sulla sinistra. Poi nelle due colone seguenti fa la somma dei numeri adiacenti e una volta riscrive il numero adiacente a sinistra e procede così completando dapprima la seconda e poi, continuando senza fermarsi nel suo metodo, la terza riga. Qual è l'ultimo numero scritto da Soldato? (Es: l'inizio della seconda riga sarà 1 2 3 3 4 5 5 6 7 7... e, scrivendo la terza riga, Soldato non ricomincia la sequenza ma continua dalla mossa successiva).

Soluzione: La risposta è 5100. Gli elementi della terza riga della $3k + 1$ esima colonna sono somma di $1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 7 + 7 \ldots$ ovvero sono due volte la somma dei primi dispari meno 1; la somma dei primi n dispari è n^2, e quindi l'elemento suddetto è $2(k + 1)^2 - 1$; notiamo che gli elementi della terza riga della $3k + 2$ esima colonna sono uguali. L'ultimo numero è della forma $3k + 3$ con $k = 49$, quindi il numero precedente è 4999, cui si deve sommare il 150-esimo numero della seconda riga, ovvero 101.

7. Io sono Dave

I quattro amici vengono accolti da un misterioso polpo. "Io sono Dave!". Silenzio. "Io sono Daaaaave". Skipper non ricorda di aver mai sentito quel nome. Allora Dave inizia a raccontare. C'era una volta un polpo felice di nome Dave nello zoo di Central Park. Un giorno arrivarono 2017 pinguini: quelli carini dicevano sempre la verità, quelli coccolosi mentivano sempre. Dave li mise in fila e li interrogò tutti, e questi in ordine dissero:

- C'è almeno un pinguino...
- Ci sono almeno due pinguini...
- ...
- Ci sono almeno 2017 pinguini...

Dave, però, non ricorda più quali e quanti pinguini abbiano detto la parola "carino/i" e quali la parola "coccoloso/i" al termine della loro frase. L'unica cosa che ricorda è il fatto che i turisti andavano solo più a vedere i pinguini, ignorando lui. Qual è la massima somma possibile tra numero dei pinguini coccolosi e numero di parole "coccoloso/i" dette dai pinguini in fila?

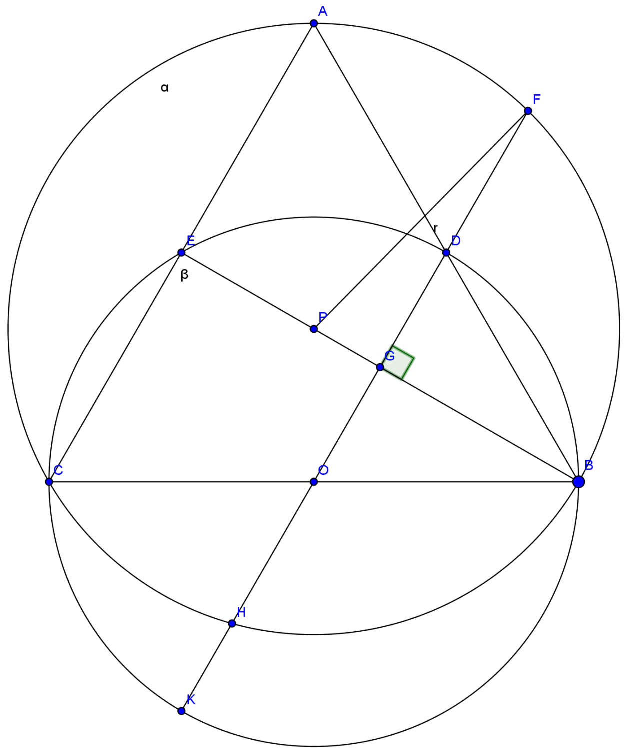
Soluzione: La soluzione è 3025. Sia a il numero dei pinguini coccolosi e b il numero dei pinguini carini. L'idea è che, una volta fissati a e b, non è difficile capire chi possa mentire e chi invece debba dire il vero, conviene quindi ragionare con a e b variabili dividendo però le possibili situazioni in due casi. In ogni caso vale $a+b = 2017$, e conviene dividere in due possibilità: $a > b$ e $a < b$. Supponiamo ora $a > b$. In questo caso se $n \leq b$ l'n-esimo pinguino ha detto certamente la verità, sia che abbia detto "carino/i" sia che abbia detto "coccoloso/i", perché entrambe le frasi Ci sono almeno n pinguini... sono vere in questa situazione; dunque i primi b pinguini sono tutti carini, ed essendo b proprio il numero dei pinguini carini, tutti gli altri devono essere coccolosi. L'n-esimo pinguino, se $b < n \leq a$, essendo coccoloso avrà detto il falso e quindi avrà detto "carino", altrimenti avrebbe detto il vero; invece, se $n > a$ l'n-esimo pinguino avrà sempre detto il falso, ma può aver detto sia "carino/i" sia "coccoloso/i". Dunque, fissati a e b e supposto $a > b$, la massima somma possibile tra numero di pinguini coccolosi e numero di parole "coccoloso/i" si ha quando tutti i primi b pinguini e tutti gli ultimi b pinguini hanno detto coccoloso, e tale somma è quindi $b+b+a$: ci sono a pinguini coccolosi e vengono dette $2b$ volte le parole "coccoloso/i". Supposto $a > b$, e sapendo $a + b = 2017$, tale somma è massima quando b è massimo, ovvero quando b è 1008 e a 1009, risultando proprio 3025. Nel caso in cui $a < b$ il ragionamento è analogo e porta a somma massima 3024.

8. Alla vecchia maniera

Skipper studia attentamente la mappa del covo in cui si trovano: è composta da un triangolo equilatero ABC di lato 1000 e α la sua circonferenza circoscritta. Siano D un punto di $\overline{AB}$ tale che $\overline{AD} = \overline{DB}$ e β la circonferenza di centro O e passante per i punti C, B e D. Chiamata r la retta passante per $\overline{OD}$, sia $H = \alpha \bigcap r$ tale che O appartenga a $\overline{DH}$ e sia $K = \beta \bigcap r$ un punto diverso da D. Senza averci capito nulla, dà l'ordine di fuggire alla vecchia maniera: Rico all'istante vomita tutto il necessario. Un po' di cazzotti, alcuni lividi, due esplosioni e sono fuori. Con astuzia, Kowalski chiede: "Skipper, ho una domanda: ma sei riuscito a calcolare $\overline{HK}$?".

Soluzione: La risposta è 0191. Poiché $\overline{AD} = \overline{DB}$ si ha che il punto D è il punto medio del lato $\overline{AB}$. Tracciando la retta parallela a $\overline{BC}$ che interseca il lato $\overline{AC}$ in un punto E. Per costruzione si ha che i triangoli ABC e ADE sono simili e per questo $\overline{DE} = \overline{EC} = \overline{DB}$. Considero il quadrilatero $CBDE$: è inscrittibile poiché i triangoli ABC e ADE sono simili si ha che $\widehat{ADE} = 60°$, perciò $\widehat{EDB} = 120°$, inoltre ABC è equilatero perciò $\widehat{BCE} = 60°$; la somma di questi due angoli è $180°$ perciò il quadrilatero è inscrittibile e la sua circonferenza circoscritta coincide con β. Detto O il centro della circonferenza β considero i triangoli BOD e DOE: ho che entrambi i triangoli sono isosceli con lati congruenti tra loro i raggi $\overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OE}$; poiché hanno anche la base uguale sono due triangoli congruenti tra loro. Perciò $\widehat{EDO} = \widehat{DBO} = \widehat{ODB}$. Poiché i triangoli ABC e ADE sono simili si ha che $\widehat{ADE} = 60°$, perciò $\widehat{EDB} = 120°$ da cui $\widehat{ODB} = 60°$. Un triangolo isoscele di angolo alla base di $60°$ è equilatero, perciò il raggio di β è $R_\beta = \overline{DB} = \frac{\overline{BC}}{2}$, quindi O è il punto medio del lato $\overline{BC}$.Perciò i punti D, O, H e K sono allineati. Si ha, inoltre, che $\overline{OB} = \overline{OD} = \overline{DB}$ e quindi che ODB è simile a ABC con ragione $\frac{1}{2}$. Siano P il centro di α, F l'altra intersezione tra r ed α e G l'intersezione tra r e $\overline{BE}$. Si ha che $\overline{PF} = R_\alpha = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}}$, poiché E punto medio $\overline{GD} = \frac{\overline{OD}}{2}$, per la similitudine tra ABC e ODB si ha $\overline{GB} = \frac{\overline{BE}}{2}$. Poiché P è circocentro di un triangolo equilatero si ha $\overline{BP} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BE}$, perciò $\overline{PG} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) \cdot \overline{BE} = \frac{1}{6} \cdot \overline{BE} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \overline{AB}$. Per Pitagora si ha quindi che $\overline{GF} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \overline{PG}^2} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{3}{144}} \cdot \overline{AB} = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \overline{AB}$, da cui $\overline{DF} = \overline{GF} - \overline{DG} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \overline{AB}$. Poiché ABC è simmetrico rispetto a $\overline{BE}$ si $\overline{OH} = \overline{DF} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \overline{AB}$, perciò si ha:

$$\overline{HK} = \overline{OK} - \overline{OH} = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}) \cdot \overline{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \cdot 1000 = 191$$



9. Aiuto inaspettato

Gli scagnozzi di Dave sono alle calcagna dei quattro fuggitivi. Ormai sono in trappola. Li hanno circondati. Ma l'inatteso arrivo della squadra del Vento del Nord riesce a portare in salvo i pinguini. Skipper, irritato, li mette alla prova: "Se siete davvero intelligenti, calcolate $-s^4+18s^2+8s$, sapendo che a, b, c sono le soluzioni di $x^3-9x^2+11x-1 = 0$ e $s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$". Agente Segreto, il leader della squadra, lo calcola velocemente con una calcolatrice. Che numero ha trovato?

Soluzione: La risposta è 0037. Sia $t = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$, allora sappiamo:

- $s^2 = a + b + c + 2t = 9 + 2t$
- $t^2 = ab + bc + ca + 2s\sqrt{abc} = 11 + 2s$
- $s^4 = (9 + 2t)^2 = 125 + 36t + 8s$
- $18s^2 = 162 + 36t$

da cui $-s^4 + 18s^2 + 8s = 37$.

10. Giocare d'anticipo

Allarme: Dave sta intrappolando tutti i pinguini del mondo! Bisogna anticipare la sua prossima mossa! Kowalski numera tutte le città del mondo in cui c'è uno zoo $C_0, C_1, C_2, ...$: sono più di 10000! Partendo da C_0, Soldato lancia una moneta equa e se esce testa passa dal posto C_k a C_{2k}, altrimenti va a C_{2k+1}. La città su cui si ferma Soldato dopo il dodicesimo lancio sarà il prossimo obiettivo di Dave. Ora, però, devono elaborare un piano! Qual è la probabilità che tale città abbia un indice multiplo di 7? (Dare la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

Soluzione: La risposta è 2341. Ogni sequenza di lanci descrive una sequenza binaria di 12 cifre, ovvero un intero tra

0 e 4095. L'indice di arrivo è divisibile per 7 se e solo se lo è il numero identificato dalla sequenza. Tra 0 e 4095 ci sono 586 interi divisibili per 7, la risposta è quindi $\frac{586}{4096} = \frac{293}{2048}$.

11. Partire in ritardo

Skipper è già partito alla ricerca di Dave, invece Agente Segreto sta ancora elaborando un piano. Di fronte a sé ha una griglia 32×32, con righe e colonne numerate (a partire da 1). All'interno di ogni casella che ha sia la riga sia la colonna divisibile per 3 mette una pedina. Poi disegna un rettangolo con i vertici nei centri di 4 caselle e lati paralleli alle linee della griglia, in modo tale che i lati del rettangolo non passino in caselle contenenti delle pedine. All'interno del rettangolo sono contenute esattamente 5 pedine. "Ci sono! Possiamo partire, ho un piano infallibile!" esclama Agente Segreto. Ma in quanti modi diversi poteva tracciare tale rettangolo?

Soluzione: La risposta è 1920. Notiamo che affinché un rettangolo contenga esattamente 5 pedine esse devono stare tutte sulla stessa riga o colonna. In ogni riga con delle pedine ce ne sono esattamente 10, quindi abbiamo 6 possibili gruppi di 5 di esse consecutive. In più possiamo raggruppare le pedine sia in orizzontale che in verticale, ovvero in $6 \cdot 10 \cdot 2 = 120$ modi. Per ognuno dei due vertici diagonalmente opposti del rettangolo ho 4 possibilità, mentre gli altri due sono obbligati. La risposta è quindi $120 \cdot 4 \cdot 4 = 1920$.

12. [$\star$] Il piano perfetto

Zoo di Shanghai. Sono in posizione, pronti per attaccare. Soldato fa da esca. Dave spunta dal fondo del corridoio. Skipper ricapitola il piano: "Ricorda Rico, devi sputare il chiodo quando sono passati esattamente S secondi a partire da ora, dove S sono le ultime 4 cifre della somma degli interi positivi scrivibili come $2^a 3^b 5^c$ per a, b, c interi positivi tali che $a + b + c = 10$". Quanto vale S?

Soluzione: La risposta è 5500. Svolgendo i calcoli otteniamo il seguente

$$\sum_{a+b+c=10} 2^a 3^b 5^c = \sum_{a=1}^{8} 2^a \left(\sum_{b=1}^{9-a} 3^b 5^{9-b} \right) = 3 \cdot 5 \sum_{a=1}^{8} 2^a \cdot \frac{5^{9-a} - 3^{9-a}}{5-3} =$$

$$= \frac{3 \cdot 5}{5-3} \left(\sum_{a=1}^{8} 2^a 5^{9-a} - \sum_{a=1}^{8} 2^a 3^{9-a} \right) = \frac{3 \cdot 5}{5-3} \left(2 \cdot 5 \cdot \frac{5^8 - 2^8}{5-2} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3^8 - 2^8}{3-2} \right) =$$

$$= 5(5^9 - 5 \cdot 2^8 + 3^2(3^8 - 2^8)) = 5^{10} - 5(3^{10} - 2^{10}) \equiv 5500 \pmod{10000}$$

13. [$\star$] Maledetta ignoranza!

Soldato è stato rapito da Dave! Skipper ruba la nave del Vento del nord per inseguirlo e mette Kowalski ai comandi. Nel frattempo, Rico schiaccia a caso un numero infinito di volte 3 tasti: A, B e β. La probabilità che prema il tasto A è $1/6$, che prema B è $1/2$, che prema β è $1/3$. Ogni volta che preme un tasto si scrive cosa ha premuto, tranne se preme β poiché non sa scrivere quella lettera. Qual è la probabilità che scriva la sequenza AA prima di BB? (Dare la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

Soluzione: La risposta è 0059. Siccome β non viene scritto possiamo ignorarne l'esistenza. Quindi possiamo considerare come se Rico scrivesse A con probabilità $1/4$ e B con probabilità $3/4$. Sia n il numero di lettere scritte da Rico e sia $P(n)$ la probabilità che le ultime 2 lettere scritte siano AA e che prima non ci sia BB; se n è pari $P(n) = (\frac{1}{4})^{\frac{n-2}{2}} (\frac{3}{4})^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{16}$, se n è dispari è $P(n) = (\frac{1}{4})^{\frac{n-3}{2}} (\frac{3}{4})^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{16} \frac{3}{4}$. La risposta è quindi

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(k) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\frac{3}{4}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right)^j = \frac{7}{52}$$

14. [$\star$] Preparativi con Kowalski

Skipper sta studiando la mappa dell'isola su cui è prigioniero Soldato. L'isola ha la forma di un quadrilatero $ABCD$, con l'angolo in A ottuso, tale che, detti H il punto di $\overline{CD}$ tale che $\overline{AH}$ sia ortogonale a $\overline{CD}$ e K il punto di $\overline{AB}$

tale che $\overline{CK}$ sia ortogonale ad $\overline{AB}$, H e K appartengano ai lati del quadrilatero e $\widehat{HAD} = \widehat{CBK}$ e $\widehat{KCD} = \widehat{ADH}$. Siano $\overline{BC} = 1521$, $\overline{BK} = 1404$ e $\overline{DH} = 175$. Con l'aiuto di Kowalski calcola la lunghezza di $\overline{HK}$. Ora è pronto per presentare il suo piano. Quanto è lungo $\overline{HK}$?

Soluzione: La risposta è 0612. $\overline{HK}$ è una diagonale del quadrilatero $AKCH$, il quale ha due angoli opposti retti per costruzione e di conseguenza è inscrittibile, perciò in quel quadrilatero è valido il teorema di Tolomeo che mi dice che:

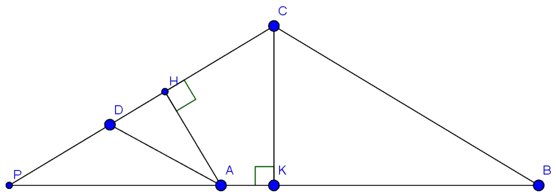
$$\overline{HK}\cdot\overline{AC} = \overline{AK}\cdot\overline{HC} + \overline{AH}\cdot\overline{KC}$$

Perciò devo determinare le lunghezze mancanti dei segmenti coinvolti in tale equazione. Poiché il triangolo BCK è rettangolo vale il teorema di Pitagora, perciò $\overline{BK} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2}$. Prima di svolgere i conti scompongo in fattori primi le lunghezze dei lati $\overline{BC} = 1521 = 3^2\cdot 13^2$ e $\overline{BK} = 1404 = 2^{\cdot}3^3\cdot 13$ e noto che si possono esprimere come $\overline{BC} = 3^2\cdot 13\cdot 13$ e $\overline{BK} = 3^2\cdot 13\cdot 12$ perciò i lati del triangolo corrisponderanno alla terna pitagorica $(5, 12, 13)$ moltiplicata per $3^2\cdot 13$ e di conseguenza $\overline{CK} = 3^2\cdot 13\cdot 5 = 585$. Poiché i triangoli ADH e BCK sono entrambi rettangoli e hanno uno degli angoli non retti congruente sono simili e per corrispondenza tra angoli e lati $\overline{DH}$ corrisponde al lato multiplo di 5, perciò $\overline{DH} = 175 = 5\cdot 35$ mi dà che $\overline{DA} = 13\cdot 35 = 455$ e $\overline{AH} = 12\cdot 35 = 420$. Prolungando il lato $\overline{AB}$ dalla parte di A e il lato $\overline{CD}$ dalla parte di D essi si intersecheranno, dal momento che l'angolo in A è ottuso, in un punto che chiameremo P. Poiché il triangolo PCK è retto e $\widehat{PCK} = \widehat{ADH}$ si ha che i triangoli PCK e ADH sono simili. Quindi il triangolo PCK è quindi anche simile al triangolo BCK e avendo un lato corrispondentemente uguale sono proprio congruenti e quindi $\overline{PC} = 1521$ e $\overline{PK} = 1404$. Il triangolo PCK è, inoltre, simile al triangolo PAH, in quanto entrambi rettangoli e con un angolo in comune. Per la similitudine tra triangoli ho che:

$$\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{AH} : \overline{CK} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{\overline{PC}\cdot\overline{AH}}{\overline{CK}} = \frac{1521\cdot 420}{585} = 1092 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$$

Perciò $\overline{AK} = \overline{PK} - \overline{PA} = 1404 - 1092 = 312 = 2^3\cdot 3\cdot 13$. Inoltre, per la similitudine coi triangoli precedenti avrò $\overline{PH} = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 12 = 1008$, da cui $\overline{CH} = \overline{PC} - \overline{PH} = 1521 - 1008 = 513$. Il triangolo CAK è rettangolo; noto che $\overline{CK} = 3\cdot 13\cdot 15 = 585$ e che $\overline{AK} = 3\cdot 13\cdot 8$ perciò i lati del triangoli saranno dati dalla terna pitagorica $(8, 15, 17)$ moltiplicata per 39, perciò $\overline{CA} = 3\cdot 13\cdot 17 = 663$. Ho ottenuto tutti i dati che mancavano, li sostituisco nell'equazione e ottengo:

$$\overline{HK} = \frac{\overline{AK}\cdot\overline{HC} + \overline{AH}\cdot\overline{KC}}{\overline{AC}} = \frac{312\cdot 513 + 420\cdot 585}{663} = 612$$



15. Preparativi senza Kowalski

Agente Segreto sta studiando la mappa dell'isola su cui è prigioniero Soldato. Sa come distrarre gli scagnozzi di Dave. Sa come arrivare al suo covo. Sa come batterlo. Ma per la fuga serve dell'esplosivo. La quantità in grammi è data dalla somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini di $f(2017)$, sapendo che $f(1) = 2017$ e che $f(1) + ... + f(n) = n^2 f(n)$ per ogni intero $n > 1$. Con l'aiuto di un computer lo calcola. Ora è pronto per presentare il suo piano. Quanto esplosivo deve portare?

Soluzione: La risposta è 1010. Riscriviamo il testo come $f(n) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1)$, da cui $f(n) = \frac{(n-1)f(n-1)}{n+1}$. Procedendo per ricorsione otteniamo $f(n) = f(1)\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3} = \frac{2}{n(n+1)}f(1)$, da cui $f(2017) = \frac{1}{1009}$.

16. Che fine ha fatto Soldato?

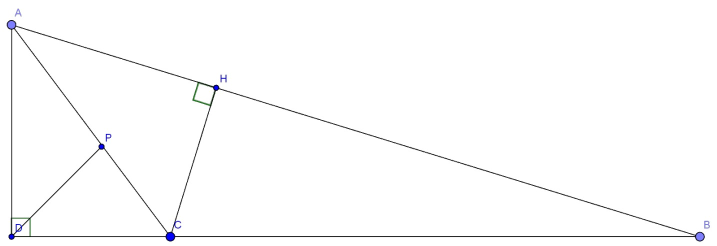
Il grande macchinario di avvicina al luogo in cui è stato legato Soldato. Visto da una certa distanza, il macchinario ha la forma di un triangolo ABC ottusangolo in C di area 67200. Si ha $\overline{AD}$ l'altezza riferita a $\overline{BC}$ e $\overline{CH}$ l'altezza riferita a $\overline{AB}$. Si ha $\overline{AD} = 224$ e $\overline{DC} = \overline{CH}$. P è il punto di $\overline{AC}$ tale che $\widehat{PDC} = 45°$, e si ha che $\overline{AP} = 160$. Dave è pronto a trasformare il più coccoloso pinguino della storia in un mostro. Il macchinario spara. Soldato è svanito. È stato disintegrato? Mentre attendi la risposta, calcola la somma delle distanze del punto P dai segmenti $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$.

Soluzione: La risposta è 0288. Poiché $\widehat{BDA} = 90°$ e $\widehat{PDC} = 45°$ si ha che la retta passante per $\overline{PD}$ è la bisettrice di $\widehat{BDA}$, quindi posso applicare il teorema della bisettrice sul triangolo ADC, il quale è rettangolo perciò vale anche il teorema di Pitagora. I due teoremi mi danno le seguenti equazioni:

$$\overline{AD} \cdot \overline{PC} = \overline{DC} \cdot \overline{AP} \Rightarrow 56 \cdot \overline{PC} = 40 \cdot \overline{DC}$$

$$40 + \overline{PC} = \sqrt{56^2 + \overline{DC}^2}$$

Risolvendo il sistema si ottiene che $\overline{DC} = 168$ e che $\overline{PC} = 120$. Poiché l'area è 67200 e $\overline{AD}$ è un'altezza si ha che $\overline{BC} = 600$. Stessa cosa in riferimento $\overline{CH} = \overline{DC} = 168$, si ha che $\overline{AB} = 800$. Poiché $\overline{CH} = \overline{DC}$ si ha che la retta passante per $\overline{AC}$ è la bisettrice di $\widehat{DAB}$. Quindi P è l'intersezione di due bisettrici del triangolo ADB e quindi ne è l'incentro. Perciò la distanza di P dai lati di ADB, che è la richiesta del problema, è sempre la stessa ed è pari al raggio della circonferenza inscritta al triangolo, che noi sappiamo valere $r = \frac{Area_{ABD}}{p} = \frac{86016}{(224+800+768)/2} = 96$. Sommando le distanze, cioè moltiplicando per 3 il raggio, si ottiene il risultato.



17. [$\star$] Si è salvato!

Incredibilmente Soldato è riuscito a fuggire e a salvarsi prima di essere trasformato in mostro! Ma gli serve una mano per salvare gli altri pinguini, così cerca di liberare la squadra del Vento del Nord. Per farlo, deve inserire un codice a quattro cifre. Accanto al tastierino trova un biglietto con scritto: trova tutte le terne di interi (m, n, p) con p primo tali che $m^2 - 3mn + p^2n^2 = 12p$. Se le terne con questa proprietà sono $(m_1, n_1, p_1), ..., (m_k, n_k, p_k)$, il codice è esattamente $m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 + ... + m_k^2 + n_k^2 + p_k^2$. Quale codice deve digitare Soldato?

Soluzione: La risposta è 0214. Guardando l'equazione modulo 3 ci accorgiamo che dev'essere $m^2 \equiv n^2 \equiv 0 \pmod 3$, da questo se $p \neq 3$ abbiamo un fattore 3^2 a sinistra ma non a destra, quindi $p = 3$. Risolviamo l'equazione di secondo grado rimanente in m e imponiamo il discriminante ≥ 0, ovvero $144 - 27n^2 \geq 0 \Rightarrow |n| \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow -2 \leq n \leq 2$. Notiamo ora che sia m che n devono essere pari e, provando $n = -2, 0, 2$ troviamo le 6 coppie $(0, -2, 3), (-6, -2, 3), (6, 0, 3), (-6, 0, 3), (0, 2, 3), (6, 2, 3)$.

18. È l'ora della vendetta

I preparativi sono ultimati. Il grande macchinario è carico. Il siero è pronto e i pinguini in posizione. Dave deve solamente dare il via, ma prima ricorda al suo tecnico: "La potenza del macchinario deve essere impostata esattamente a $a^6 + b^6$, altrimenti la trasformazione non avviene. E ti ricordo anche che a e b sono due reali tali che $ab = 2$ e $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+a^2} = \frac{7}{8}$". Che potenza ha il macchinario?

Soluzione: La risposta è 0084. Moltiplicando per i denominatori si ottiene $a^3 + b^3 = 7a^2b^2 - 9ab = 10$ usando il fatto che $ab = 2$. Ma allora $a^6 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 - 2a^3b^3 = 100 - 16 = 84$.

19. [$\star$] C'erano una volta dei pinguini...

Che orrore! I pinguini sono stati trasformati in mostri! Ma c'è un fatto molto curioso: a ciascun pinguino era stato assegnato un numero intero positivo e sono spuntate delle orribili corna a tutti e soli quei pinguini il cui numero ha tutti i divisori scrivibili nella forma $p-2$ con p numero primo. Tra questi poi è spuntata una terribile lingua biforcuta a tutti quelli con il massimo numero di divisori. "Queste sono le creature più orrende che potessi mai immaginare!" esclama soddisfatto Dave, prendendo con sé questi ultimi. Ma quanto vale la somma dei loro numeri? (Si intende la somma dei numeri dei pinguini con sia corna che lingua biforcuta).

Soluzione: La risposta è 0135. D'ora in poi chiameremo belli gli interi che rappresentano i pinguini con le corna e bellissimi quelli richiesti dal problema. Se n è bello non può essere pari e non può avere due fattori primi p, q entrambi diversi da 3, altrimenti $p+2, q+2, pq+2$ sarebbero tutti primi, ma se $p \equiv 0, 1 \pmod 3$ o p non è primo o non lo è $p+2$ (analogo per q) e se $p \equiv q \equiv 0 \pmod 3$ allora $pq+2 \equiv 0 \pmod 3$, quindi $n = 3^k$ con k intero positivo o $n = 3^k p$ con k intero positivo e p primo dispari diverso da 3. Il primo caso porta al massimo a $n = 81$, con 5 divisori (infatti le potenze di 3 più grandi avranno sempre 243 come divisore, ma 245 non è primo). Notiamo che nel secondo caso $n = 3^3 \cdot 5 = 135$ funziona e ha 8 divisori e mostriamo che non possiamo fare di meglio, ovvero che se $p > 5$ allora $k < 3$ (e quindi il numero di divisori, dato da $2(k+1)$, diminuirebbe). Se $k \geq 3$ infatti:

$$3^0 p + 2 \equiv p + 2 \pmod 5$$

$$3^1 p + 2 \equiv 3p + 2 \pmod 5$$
$$3^2 p + 2 \equiv 4p + 2 \pmod 5$$
$$3^3 p + 2 \equiv 2p + 2 \pmod 5$$

dovrebbero essere tutti primi, ma a meno che non valga $p \equiv 0 \pmod 5$ almeno uno di essi è divisibile per 5, assurdo. Infine, il caso $n = 3^k \cdot 5$ con $k > 3$ non funziona poiché 407 non è un numero primo (e ogni numero di quella forma avrebbe 405 come divisore).

20. Bolle di sapone

Dave vuole festeggiare la riuscita del suo piano regalando dei barattoli di bolle di sapone. Li vuole dividere equamente tra sé e i suoi scagnozzi, così li mette tutti in fila. Davanti ad ognuno di loro pone un numero di barattoli uguale al numero degli scagnozzi. Purtroppo, però, un barattolo si rivela vuoto e quindi deve essere buttato. Sapendo che il numero degli scagnozzi di Dave è un quadrato perfetto, e che il numero di barattoli che ha avuto per sè Dave è minore di 10000 e ha esattamente quattro divisori positivi, quanti barattoli al massimo ha avuto per sé Dave?

Soluzione: La soluzione è 5183. Chiamato q^2 il numero degli scagnozzi di Dave il numero dei barattoli è $q^4 - 1$; dunque Dave riceverà $\dfrac{q^4-1}{q^2+1}$ barattoli; decomponendo il numeratore si vede che riceve dunque $(q-1)(q+1)$ barattoli. Quindi $q-1$ e $q+1$ devono essere i più grandi primi gemelli minori di 100, ovvero 71 e 73, e il numero dei barattoli $71 \cdot 73 = 5183$.

21. [$\star$] Il sacrificio di Soldato

Soldato ha preso la sua decisione: il suo sacrificio farà tornare tutti i pinguini coccolosi come una volta. Entra nel macchinario e preme invio. Per terra vengono proiettate 2018 rette, tali che non ce ne siano due parallele. Per ogni triangolo equilatero formato dalle intersezioni delle rette, 3 pinguini tornano alla loro bellezza naturale, mentre per ogni triangolo isoscele (e non equilatero) formato, 1 pinguino torna bello. Quanti pinguini riesce a trasformare al massimo? (Dare il resto della divisione per 1000 della risposta.)

Soluzione: La risposta è 0144. Definiamo un triangolo *buono* se è formato da tre rette, con due lati della stessa lunghezza, che lo identificheranno. Il numero di pinguini sarà il numero di triangoli *buoni*. Infatti per ogni coppia (l_1, l_2) di rette c'è al massimo un triangolo isoscele identificato da l_2 (e da un'altra retta) ma non da l_1. Quindi fissato l_1 troviamo al massimo $\frac{2018-2}{2}$ triangoli *buoni*. Quindi ci sono al massimo $2018 \cdot 1008$ triangoli *buoni*. Per raggiungere questo possiamo mettere le rette in modo da formare un poligono regolare di 2019 lati a cui manca uno di essi.

22. Carini e coccolosi

Tutti i pinguini sono tornati alla loro bellezza originale! Per festeggiare, 1000 pinguini si dispongono in cerchio formando i vertici di un 1000-agono regolare. Procedendo in senso antiorario, i primi 4 affermano:

1. Tra i 3 più lontani da me c'è almeno un pinguino carino
2. Tra i 2 più vicini a me c'è almeno un pinguino coccoloso
3. Tra i 7 più lontani da me c'è almeno un pinguino carino
4. Tra i 6 più vicini a me c'è almeno un pinguino coccoloso

I quattro successivi ripetono le stesse affermazioni nell'ordine: il quinto dice la stessa cosa del primo, il sesto la stessa cosa del secondo, etc. Le risposte si ripetono 4 a 4 per tutto il giro (quindi il millesimo farà la stessa affermazione del quarto). Ricordando che i pinguini carini dicono sempre la verità, quelli coccolosi mentono sempre e ogni pinguino può essere uno solo tra carino e coccoloso, qual è il massimo numero possibile di pinguini coccolosi tra questi 1000?

Soluzione: La risposta è 250. Notiamo che se uno affermasse 4 e dicesse il falso, allora i 6 pinguini vicini a lui sarebbero tutti carini, in particolare sarebbe carino quello che dice 2; ma d'altronde attorno a chi dice 2 ci sarebbero due pinguini carini, il che è assurdo, dunque chi dice 4 deve per forza dire il vero. Dunque anche chi dice 3 deve dire il vero, perché tra 7 pinguini consecutivi ce n'è sempre uno che dice 4, e che quindi è carino. Anche chi dice 1 è dunque carino, perché tra tre pinguini consecutivi ce n'è sempre almeno uno che dice 3 o 4. Infine chi dice 2 mente sempre, perché i due più vicini a lui dicono 1 e 3, e dunque sono entrambi carini. Dunque i pinguini coccolosi sono tutti e soli quelli che dicono 2, che sono 250.

23. La giusta punizione

Anche Dave è stato colpito dal raggio che ha liberato tutti i pinguini. Ora si trova all'interno di una sfera di raggio R. O meglio, all'interno di una di quelle palle di vetro che, se agitate, fanno l'effetto neve. All'interno di questa sfera vi sono tre corde che misurano rispettivamente $5, 6, 7$, sono perpendicolari a due a due tra loro e si incontrano in un punto all'interno di essa. Una bimba trova molto carino quel polipetto, quindi decide di tenere la palla per sé. Quanto vale al massimo la parte intera di $1000R$?

Soluzione: La risposta è 3872. Supponiamo che la sfera sia centrata nell'origine con raggio R, allora le corde hanno lunghezze rispettivamente $2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $2\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$, $2\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$. Ponendo queste quantità uguali a $5, 6, 7$ e ponendo senza perdere generalità $z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$ per massimizzare otteniamo $R = \sqrt{15} = 3.872...$.

24. Il prezioso aiuto di Kowalski

Kowalski ha deciso di darvi un aiuto per affrontare l'ultimo problema: "La divisione è un'operazione non associativa, ovvero applicandola due volte a una terna di numeri il risultato dipende dall'ordine con cui vengono eseguiti i calcoli: ad esempio 1 diviso due terzi è diverso da un mezzo diviso tre". Soldato deve fare nove divisioni per calcolare una gigantesca frazione alla lavagna dove sono scritti dieci numeri naturali e nove simboli di frazione. Quanti tentativi deve fare, al massimo, per essere certo di aver fatto la divisione nell'ordine giusto?

Soluzione: La risposta è 256. Innanzitutto notiamo che fare $a : b$ è come fare ab^{-1}: quindi al termine delle nove divisioni, chiamati $a_1, a_2, \dots a_{10}$ i numeri da dividere, il risultato sarà della forma $a_1^{\pm 1} a_1^{\pm 1} \dots a_{10}^{\pm 1}$. Se dunque $a_1 \dots a_{10}$ sono 10 numeri primi distinti non ci sarà alcuna semplificazione, e il numero di risultati distinti dipenderà unicamente dagli esponenti, ovvero sarà determinato dalle possibili sequenze di più e meno 1. Con tali osservazioni è più semplice notare la seguente proprietà, che dimostriamo per induzione su n, quantità di numeri scritti alla lavagna: il primo numero avrà in ogni caso esponente 1, il secondo sempre esponente -1, e ci sono 2^{n-2} possibili risultati diversi. Per $n = 3$ questa proprietà è vera, supponiamo che valga per $n > 2$ e dimostriamola per $n + 1$. Innanzitutto fissata una sequenza di ± 1 di lunghezza $n + 1$, con primo elemento 1 e secondo -1, dobbiamo mostrare che esiste un modo di dividere $a_1 a_2 \dots a_{n+1}$ per cui gli esponenti del risultato sono gli stessi numeri della sequenza. Se il terzo elemento della sequenza è -1 sappiamo per ipotesi induttiva che esiste un modo di dividere $aa_3 \dots a_{n+1}$ che dà come risultato, per $a_3 \dots a_{n+1}$, gli esponenti voluti della sequenza, e esponente 1 ad a; ora è sufficiente fare una divisione in più e sostituire quindi $a_1 a_2^{-1}$ ad a. Se il terzo elemento della sequenza fissata è invece 1 sappiamo per ipotesi induttiva che c'è un modo di dividere $a_1 b a_4 \dots a_{n+1}$ che dà come esponenti, relativamente a $a_1 a_4 \dots a_{n+1}$, gli stessi numeri voluti della sequenza fissata e -1 a b; se si sostituisce ora $a_2 a_3^{-1}$ a b il risultato viene $a_1 a_2^{-1} a_3 \ldots$, ovvero la sequenza cercata. Rimane solo da verificare che il primo numero avrà sempre esponente 1 e il secondo -1: anche questo si fa per casi, a secondo se la prima divisione svolta coinvolga o meno a_1 e a_2. La risposta è quindi $2^8 = 256$.